مفاهيم وقوانين

الاحصاء

الصف الثالث الثانوى

منتدى توجيه الرياضيات
أ/ عادل إدوار

تعاريف الإحتكاك

قوة الإحتكاك " ح "

هى قوة خفية تظهر عند محاولة تحريك جسم على سطح خشن تقاوم حركته وتعمل على إيقافه

قوة الإحتكاك النهائية " ك "

هى القيمة النهائية لمقدار قوة الإحتكاك و التى عندها يكون الجسم على وشك الحركة أو متحرك

معامل الإحتكاك " م "

هو النسبة بين مقدارى قوة الإحتكاك النهائى " ك " و رد الفعل العمودى " ر "بالتالى

فإن : ك = م ر

رد الفعل المحصل (ر′)

قوة رد الفعل المحصل (ر′) هى محصلة مقدار قوة الإحتكاك ، قوة رد الفعل العمودى (ر)

أى : $\text{ر}'^{2} = \text{ر}^{2} + \text{ح}^{2}$

و عندما يكون الإحتكاك نهائياً فإن :

∴ $\text{ر}'^{2} = \text{ر}^{2} \left(١ + \text{م}^{2} \right)$

زاوية الإحتكاك " ل "

هى الزاوية المحصورة بين خطى عمل قوة رد الفعل العمودى (ر) و قوة رد الفعل المحصل (ر′) " عندما يصبح الإحتكاك نهائى"

و يكون : ظا ل = م

خواص الإحتكاك

- قوة الإحتكاك تعمل على معاكسة حركة الجسم فتكون فى إتجاه مضاد للإتجاه الذى يميل الجسم للتحرك فيه
- مقدار قوة الإحتكاك يزداد كلما تزايد مقدار القوة المماسية التى تعمل على تحريك الجسم و يكون مساوياً لمقدار هذه القوة مادام الجسم متزناً
- يزداد مقدار قوة الإحتكاك إلى أن يصل حداً لا يتعداه و عندئذ يصبح الجسم على وشك الحركة و يسمى الإحتكاك فى هذه الحالة " الإحتكاك النهائى " و يظل الإحتكاك نهائياً أثناء الحركة
- النسبة بين مقدارى قوة الإحتكاك النهائى و رد الفعل العمودى ثابتة ، و تتوقف على طبيعة الجسمين المتلامسين و ليس على شكليهما أو كتلتيهما و تسمى معامل الإحتكاك

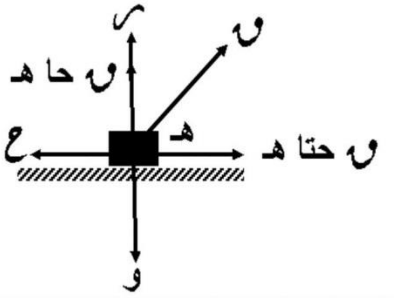
الحالات المختلفة لحركة الجسم

- إذا كان : ع = م ر فإن : الجسم يكون متزناً و على وشك الحركة أو متحركاً أى أن : الإحتكاك نهائى
- إذا كان : ع < م ر فإن : الجسم يكون متزناً و ليس على وشك الحركة أى أن : الإحتكاك غير نهائى

إتزان جسم على مستو خشن

المستوى أفقى

فى الشكل المقابل :



ع = ق حتا هـ ، ر + ق حا هـ = و

ملاحظات

* عندما يكون الجسم على وشك الحركة تحت تأثير القوة فإن :

ع = ك = م ر

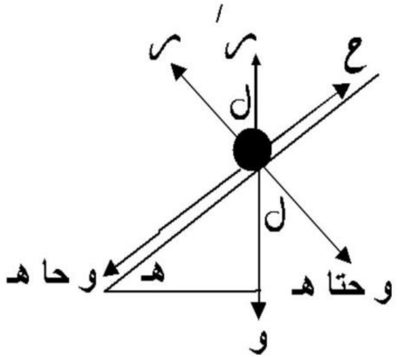
و بالتالى يكون :

م ر = ق حتا هـ ، ر + ق حا هـ = و

* إذا كانت ق أفقية نضع هـ = ٠ فى العلاقات السابقة

المستوى مائل

الشكل المقابل :



ع = و حا هـ ،

ر = و حتا هـ

ملاحظات

هـ < ل	هـ = ل	هـ > ل
يستقر الجسم على المستوى و لا يكون الإحتكاك نهائياً	يكون الجسم على وشك الإنزلاق تحت تأثير وزنه فقط و الإحتكاك نهائى	ينزلق الجسم لأسفل و الإحتكاك نهائى

هـ قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

ل قياس زاوية الإحتكاك

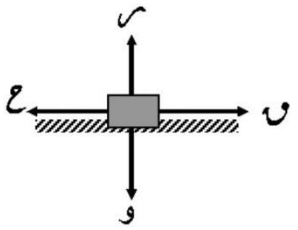
الحالات المختلفة لإتزان جسم على مستو

أفقى خشن

أثرت على الجسم قوة أفقية مقدارها ق

شرطا الإتزان :

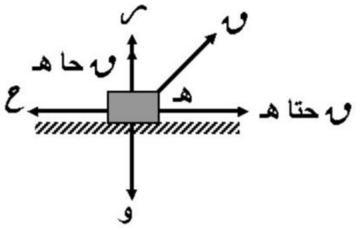
ع = ق ، ر = و



أثرت على الجسم قوة مقدارها ق تميل لأعلى

شرطا الإتزان :

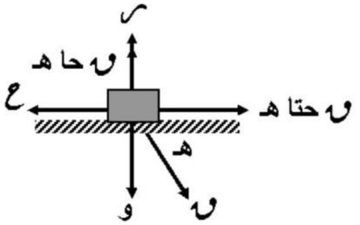
ع = ق حتا هـ ، ر + ق حا هـ = و



أثرت على الجسم قوة مقدارها ق تميل لأسفل

شرطا الإتزان :

ع = ق حتا هـ ، ر = و + ق حا هـ

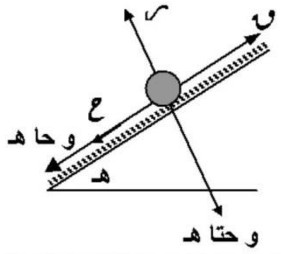


مائل خشن

أثرت على الجسم قوة مقدارها ق فى إتجاه خط أكبر ميل لأعلى

شرطا الإتزان :

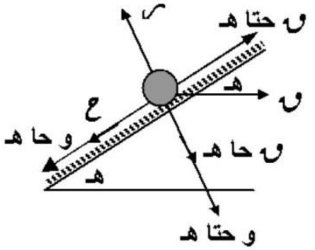
ق = ع + و حا هـ ، ر = و حتا هـ



أثرت على الجسم قوة أفقية مقدارها ق

شرطا الإتزان :

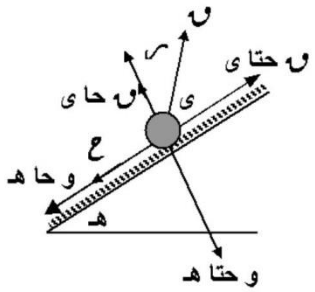
ق حتا هـ = ع + و حا هـ ، ر = ق حا هـ + و حتا هـ



أثرت على الجسم قوة مقدارها ق تميل على خط أكبر ميل

شرطا الإتزان :

ق حتا ى = ع + و حا هـ ، ر + ق حا ى = و حتا هـ



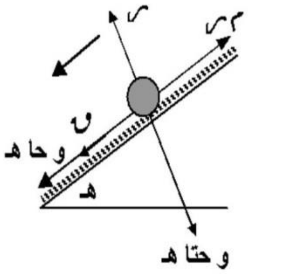
الحالات المختلفة لإتزان جسم على مستو مائل خشن

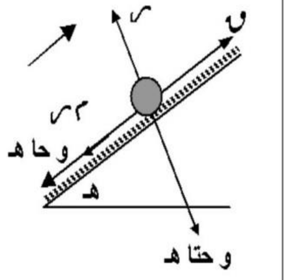
بفرض أن : هـ زاوية ميل المستوى على الأفقى ، ل زاوية الإحتكاك

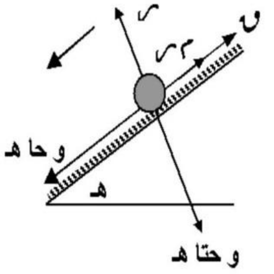
أولاً : هـ < ل " طا هـ < م "	ثانياً : هـ = ل " طا هـ = م "	ثالثا : هـ > ل " طا هـ > م "
إنزلاق جسم تحت تأثير وزنه فقط		
يستقر الجسم على المستوى (لا يكون الجسم على وشك الحركة لأسفل) الإحتكاك غير نهائى ع < م ر " و حا هـ < م ر "	يكون الجسم على وشك الأنزلاق " على وشك الحركة لأسفل " الإحتكاك نهائى ع = م ر " و حا هـ = م ر "	ينزلق الجسم " يكون الجسم متحركاً لأسفل " – لا يمكن أن يتزن الجسم تحت تأثير وزنه فقط – لا يمكن أن يبقى ساكناً الإحتكاك نهائى و حا هـ > م ر

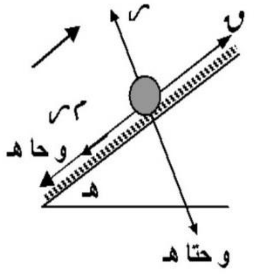
عند تأثير قوة (ق) على الجسم فى إتجاه خط أكبر ميل للمستوى

لجعل الإحتكاك نهائى				ليكون الجسم فى حالة إتزان نهائى	
(١) تجعل الجسم على وشك الحركة لأسفل بحيث : ق لأسفل و يكون : م ر لأعلى	(٢) تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى بحيث : ق لأعلى و يكون : م ر لأسفل	(١) إذا نقص قياس زاوية ميل المستوى فيكون : هـ < ل " الحالة أولاً " تعمل القوة على جعل الإحتكاك نهائى	(٢) إذا زاد قياس زاوية ميل المستوى فيكون : هـ > ل " الحالة ثالثاً " تعمل القوة على أن يكون الجسم فى حالة إتزان نهائى	(١) تجعل الجسم على وشك (الإنزلاق) الحركة لأسفل بحيث : ق لأعلى (أقل قوة تحفظ إتزان الجسم) " منع الجسم من الإنزلاق " و يكون : م ر لأعلى	(٢) تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى بحيث : ق لأعلى (أكبر قوة تحفظ إتزان الجسم) "منع الجسم من الإنزلاق " و يكون : م ر لأسفل









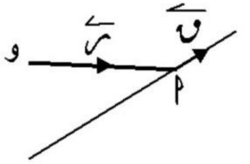
الضرب القياسى لمتجهين	الضرب الإتجاهى لمتجهين
$\vec{\text{أ}} \odot \vec{\text{ب}} = \text{أ ب حتا هـ}$ حيث : $٠ \le \text{هـ} \le ١٨٠^\circ$	$\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = (\text{أ ب حا هـ})\ \vec{\text{ى}}$ حيث : $\vec{\text{ى}}$ متجه وحدة $\perp$ مستوى $\vec{\text{أ}}$ ، $\vec{\text{ب}}$
$\vec{\text{أ}} \odot \vec{\text{ب}} = \text{أ}_١\text{ب}_١ + \text{أ}_٢\text{ب}_٢$	$\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = (\text{أ}_١\text{ب}_٢ - \text{أ}_٢\text{ب}_١)\ \vec{\text{ع}}$
$\vec{\text{أ}} \odot \vec{\text{ب}} = ٠ \Leftrightarrow \vec{\text{أ}} \perp \vec{\text{ب}}$ أ، $\vec{\text{أ}} = \vec{٠}$ أو $\vec{\text{ب}} = \vec{٠}$	$\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = \vec{٠} \Leftrightarrow \vec{\text{أ}} \,//\, \vec{\text{ب}}$ أ، $\vec{\text{أ}} = \vec{٠}$ أو $\vec{\text{ب}} = \vec{٠}$
$\vec{\text{أ}} \odot \vec{\text{ب}} = \vec{\text{ب}} \odot \vec{\text{أ}}$	$\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = -(\vec{\text{ب}} \times \vec{\text{أ}})$
$\vec{\text{أ}} \odot \vec{\text{أ}} = \text{أ}^٢$	$\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{أ}} = \vec{٠}$
$\vec{\text{س}} \odot \vec{\text{س}} = \vec{\text{ص}} \odot \vec{\text{ص}} = ١$	$\vec{\text{س}} \times \vec{\text{س}} = \vec{\text{ص}} \times \vec{\text{ص}} = \vec{\text{ع}} \times \vec{\text{ع}} = \vec{٠}$
$\vec{\text{س}} \odot \vec{\text{ص}} = \vec{\text{ص}} \odot \vec{\text{س}} = ٠$	$\vec{\text{س}} \times \vec{\text{ص}} = \vec{\text{ع}}$ ، $\vec{\text{ص}} \times \vec{\text{ع}} = \vec{\text{س}}$ ، $\vec{\text{ع}} \times \vec{\text{س}} = \vec{\text{ص}}$ ، $\vec{\text{ص}} \times \vec{\text{س}} = -\vec{\text{ع}}$ ، $\vec{\text{ع}} \times \vec{\text{ص}} = -\vec{\text{س}}$ ، $\vec{\text{س}} \times \vec{\text{ع}} = -\vec{\text{ص}}$
المسقط الجبرى لـ $\vec{\text{و}}$ فى إتجاه $\vec{\text{أ}}$ = و حتا هـ = $\dfrac{\vec{\text{و}} \odot \vec{\text{أ}}}{\lVert \vec{\text{أ}} \rVert}$	متجه الوحدة فى إتجاه $\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}$ هو المتجه $\vec{\text{ى}} = \dfrac{\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}}{\text{أ ب حا هـ}}$
المركبة الجبرية لـ $\vec{\text{و}}$ فى إتجاه $\vec{\text{أ}} = \left(\dfrac{\vec{\text{و}} \odot \vec{\text{أ}}}{\text{أ}^٢}\right) \vec{\text{أ}}$	المعنى الهندسى لمعيار حاصل الضرب الإتجاهى لمتجهين أ ب حا هـ = مساحة متوازى الأضلاع = ضعف مساحة المثلث الذى فيه $\vec{\text{أ}}$ ، $\vec{\text{ب}}$ ضلعين متجاورين

عزم قوة بالنسبة لنقطة

تعريف

جـ‾و = ر‾ × ق‾

= و أ‾ × ق‾



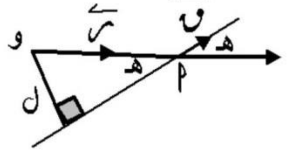
ملاحظات

عزم قوة بالنسبة لنقطة ثابت لا يتوقف على موضع نقطة تأثير القوة على خط عملها

لإيجاد خط عمل القوة نفرض أن نقطة تأثيرها (س ، ص) و العلاقة الخطية بين س ، ص تمثل معادلة خط عمل هذه القوة

معيار متجه العزم

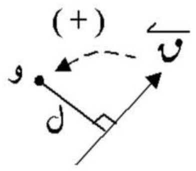
|| جـ‾و || = ر ق حا هـ = ق ل



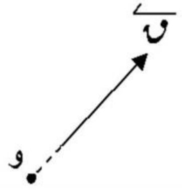
قاعدة الإشارة

القياس الجبرى لعزم قوة حول نقطة يكون :

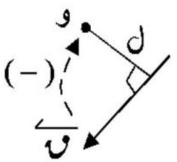
- موجباً إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول النقطة فى عكس إتجاه دوران عقارب الساعة



- صفراً لأى نقطة تقع على خط عمل القوة



- و يكون سالباً إذا كانت القوة تعمل على الدوران حول النقطة فى نفس إتجاه دوران عقارب الساعة



ملاحظة

* إذا كان : جـ‾ب = جـ‾أ

فإن : خط عمل ق‾ // أ ب ⟷

* إذا كان : جـ‾ب = − جـ‾أ

فإن : خط عمل ق‾ نصف أ ب‾

* إذا إنعدم عزم قوة بالنسبة لقوة فإن :

إما أن ينعدم معيار القوة

أو أن هذه النقطة تقع على خط عمل القوة

نظرية العزوم

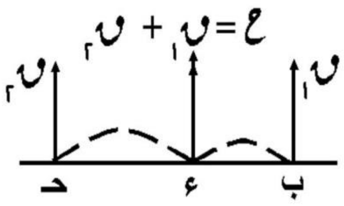
مجموع عزوم عدة قوى متلاقية فى نقطة بالنسبة أى نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة

ملاحظة: إذا أنعدم مجموع عزوم عجة قوى حول نقطة فإن : إما أن ينعدم معيار المحصلة أو أن هذه النقطة تقع على خط عمل المحصلة

محصلة قوتين متوازيتين

القوتان متحدا الإتجاه

ع = $ق_1 + ق_2$ ، خط عمل المحصلة فى نفس إتجاه القوتين ، $ق_1$ × ب ء = $ق_2$ × ء حـ



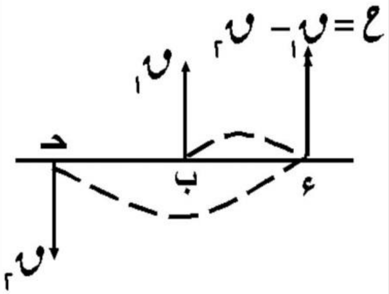
القوتان فى إتجاهين متضادين

ع = $ق_1 - ق_2$

حيث : $ق_1 > ق_2$

، خط عمل المحصلة فى نفس إتجاه القوة ذات المعيار الأكبر

، $ق_1$ × ب ء = $ق_2$ × ء حـ

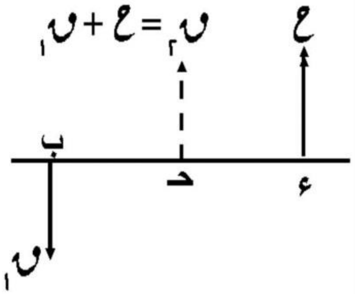


إذا علم ع ، $ق_1$

و كانتا فى إتجاهين متضادين

$ق_2$ = ع + $ق_1$

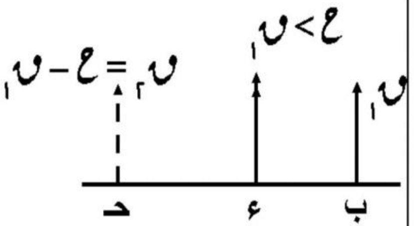
و خط عمل $ق_2$ يقع بين خطى عمل $ق_1$ ، ع و فى إتجاه خط عمل ع



و كانتا فى إتجاه واحد

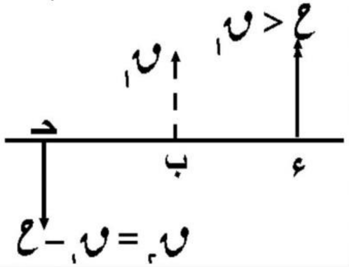
إذا كان : ع > $ق_1$ فإن :

$ق_2$ = ع − $ق_1$ ، و خط عمل $ق_2$ يقع بين خطى عمل $ق_1$ ، ع ناحية ع و فى إتجاه ع



إذا كان : ع < $ق_1$ فإن :

$ق_2$ = $ق_1$ − ع ، خط عمل $ق_2$ يقع خارج خطى عمل $ق_1$ ، ع ناحية $ق_1$ و فى إتجاه مضاد لإتجاه $ق_1$



محصلة مجموعة من القوى المستوية المتوازية

نظرية

مجموع عزوم أى عدد محدود من القوى المتوازية المستوية بالنسبة لأى نقطة يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة

خطوات تعيين محصلة عدة قوى مستوية متوازية

١ ـ نفرض متجه وحدة فى إتجاه إحدى القوى و نعبر عن هذه القوى بدلالته فيكون :
القياس الجبرى للمحصلة = مجموع القياسات الجبرية للقوى
و من هذه العلاقة يتعين معيار المحصلة و إتجاهها

٢ ـ نأخذ نقطة إختيارية فى مستوى القوى و نوجد القياس الجبرى لمتجه العزم لكل قوة فيكون :
القياس الجبرى لعزم المحصلة حول نقطة إختيارية فى مستوى القوى =
مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول نفس النقطة
و من هذه العلاقة يتعين خط عمل المحصلة

الحالات المختلفة لمحصلة عدة قوى مستوية متوازية

محصلة مجموعة من القوى المتوازية تعمل فى إتجاه واحد

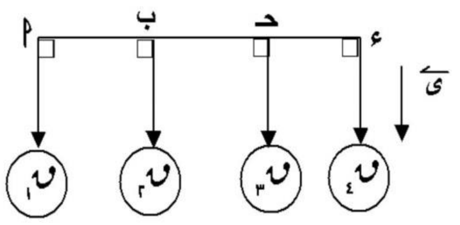
$\vec{ح} = (ق_1 + ق_2 + \cdots) \vec{ى}$

* المقدار : $ح = ق_1 + ق_2 + \cdots$

* الإتجاه : يوازى المجموعة و يعمل فى إتجاهها

* نقطة التأثير : تتعين بأخذ العزوم حول أى نقطة إختيارية

و منه نوجد بعد نقطة تأثير المحصلة عن النقطة الإختيارية



محصلة مجموعة من القوى المتوازية تعمل فى إتجاهات متضادة

$\vec{ح} = (ق_1 - ق_2 - ق_3 + ق_4 + \cdots) \vec{ى}$

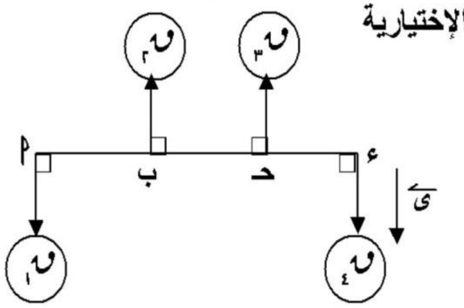
* المقدار :

$ح = | ق_1 - ق_2 - ق_3 + ق_4 + \cdots |$

* الإتجاه : يوازى المجموعة و يتحدد حسب معامل $\vec{ى}$ " إذا كان موجب فى نفس إتجاه ، إذا كان سالب فى إتجاه مضاد له "

* نقطة التأثير : تتعين بأخذ العزوم حول أى نقطة إختيارية

و منه نوجد بعد نقطة تأثير المحصلة عن النقطة الإختيارية



إتزان مجموعة من القوى المستوية المتوازية

قاعدة

إذا أتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية فإن :

١ ـ مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى = صفر

٢ ـ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أية النقطة فى مستويها = صفر

ملاحظات

إذا أرتكز قضيب على حاملين و كان :

* القضيب على وشك الدوران حول أحد الحاملين فإن :
  الضغط على الحامل الآخر = صفر
* الضغط على الحامل = رد الفعل
* إذا كان القضيب غير منتظم فإن وزنه لا يؤثر عند منتصفه
* أكبر ثقل يعلق من أحد طرفى القضيب يجعله على وشك الدوران حول الحامل القريب من هذا الطرف

الإتزان العام

تعريف

إذا إنعدم مجموع القوى و إنعدم عزم المجموعة بالنسبة لأى نقطة قيل أن :
" مجموعة القوى متوازنة "
و إذا أثرت مثل هذه المجموعة على جسم ما قيل أن :
" هذا الجسم متزن "

نظرية

إذا أنعدم مجموع القوى لمجموعة ما و إنعدم عزمها بالنسبة لنقطة واحدة كانت المجموعة متوازنة

الشروط الكافية و اللازمة لإتزان مجموعة من القوى

لكى تتوازن مجموعة من القوى يلزم و يكفى أن تتحقق الشروط الآتية :
(١) ينعدم متجه مجموع القوى
(٢) ينعدم عزم المجموعة بالنسبة لنقطة واحدة

صياغة مكافئة لهذه الشروط

لكى تتوازن مجموعة من القوى يلزم و يكفى أن تتحقق الشروط الآتية :
(١) ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى إتجاهين متعامدين واقعين فى مستويها
(٢) ينعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة فى مستويها

التعبير الرياضى لهذه الشروط

$س = ٠$ ، $ص = ٠$ ، $ع = ٠$

خطوات دراسة إتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية

(١) تحديد جميع القوى المؤثرة على الجسم و إتجاهها و نقط تأثيرها
(٢) تحليل القوى المائلة إلى مركبتين فى إتجاهين متعامدين
(٣) تطبيق شروط الإتزان العام و هى :
* المجموع الجبرى لمركبات القوى فى إتجاه ما (الأفقى عادة) = صفر $س = ٠$
* المجموع الجبرى لمركبات القوى في الإتجاه العمودى (الرأسى عادة) = صفر $ص = ٠$
* المجموع الجبرى لعزوم القوى حول أى نقطة فى مستويها = صفر

ملاحظة

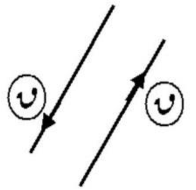
إذا أتصل قضيب بحائط رأسى عن طريق مفصل نفرض أن : مركبتى رد الفعل هما $س_1$ ، $ص_1$ ، ل قياس زاوية ميله على الأفقى حيث : $ر^2 = س_1^2 + ص_1^2$

، $طا\ ل = \frac{ص_1}{س_1}$

الإزدواجـــــات

تعريف

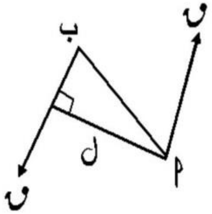
الإزدواج هو مجموعة مكونة من قوتين متساويتين فى المقدار و متضادتين فى الإتجاه و لا يجمعهما خط عمل واحد



نظرية

عزم الإزدواج هو متجه ثابت ، لا يعتمد على النقطة التى ينسب إليها عزمى قوتيه ، و يساوى عزم إحدى قوتيه بالنسبة لأى نقطة على خط عمل القوة الأخرى

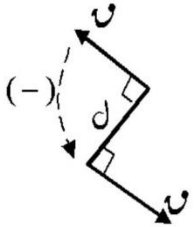
$\vec{ج} = \vec{ب أ} \times \vec{ق}$ ، $\|\vec{ج}\| = ق \times ل$



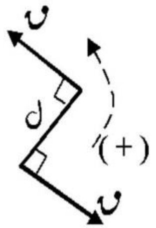
قاعدة الإشارات

يكون القياس الجبرى لعزم الإزدواج

سالباً إذا كانت قوتيه تعملان فى نفس إتجاه دوران عقارب الساعة



موجباً إذا كانت قوتيه تعملان في عكس إتجاه دوران عقارب الساعة



توازن إزدواجين

يتوازن إزدواجان مستويان معاً إذا كان : $ج_1 + ج_2 =$ صفر

أو $ج_1 = - ج_2$

* الإزدواج لا يتزن إلا مع إزدواج مثله مساو له في العزم و مضاد له في الإتجاه

تكافؤ إزدواجين

يتكافئ إزدواجان مستويان معاً إذا كان :

$ج_1 = ج_2$

* الإزدواج لا يكافئ إلا إزدواج

مجموع إزدواجين مستويين " الإزدواج المحصل "

مجموع إزدواجين مستويين هو الإزدواج الذى يساوى عزمه مجموع عزمى هذين الإزدواجين أى أن :

$ج = ج_1 + ج_2$

مجموع أى عدد محدود من الإزدواجات المستوية

$ج = ج_1 + ج_2 + \cdots\cdots + ج_ن$

قاعدة هامة

إذا أثرت ثلاث قوى مستوية فى جسم متماسك و مثلها تمثيلاً تاماً أضلاع مثلث (مضلع مقفل) مأخوذة فى ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافئ إزدواجاً معيار عزمه =

$$\frac{\text{ضعف مساحة سطح المثلث}}{\text{طول الضلع الممثل لوحدة القوة}}$$